

Colle du 30 septembre : Questions de cours de topologie

Question de cours 1 : Vrai ou faux ?

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit A un ouvert de E . Alors l'intérieur de l'adhérence de A est A .
2. Il existe des espaces vectoriels normés dans lesquels il existe des fonctions 1/2-lipschitziennes sans point fixe.
3. Soit $(U_i)_i$ une famille d'ouverts de E . Soit F une partie de E , contenue dans tous les U_i et fermée dans chaque U_i . Alors F est fermée dans $\bigcup_i U_i$.

Question de cours 2 : Vrai ou faux ?

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Un sous-espace vectoriel de E est toujours fermé.
2. Soient A une partie fermée de E et B une partie de A . L'intérieur de B pour la topologie de A coïncide avec l'intérieur de B pour la topologie de E .
3. Si E est complet et $(u_n)_n$ est une suite à valeurs dans E telle que, pour tout p , $\|u_{n+p} - u_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors (u_n) converge.

Question de cours 3 : Vrai ou faux ?

1. Deux normes sur un même espace vectoriel sont équivalentes si, et seulement si, elles définissent les mêmes parties ouvertes.
2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un voisinage de x sur lequel f est lipschitzienne.
3. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A une partie fermée de E et B une partie de A . L'adhérence de B pour la topologie de A coïncide avec l'adhérence de B pour la topologie de E .